ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Serie 4

1. Die Zufallsvariable, die die Anzahl eingehender Telefonanrufe in einer Telefonzentrale innerhalb von 10 Minuten beschreibt, nennen wir X. Sie folge einer Poissonverteilung mit Erwartungswert $\lambda = 2$, d.h. $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

a) Die (sehr kleine) Telefonzentrale ist überlastet, wenn es in einer bestimmten 10-Minuten-Periode mehr als drei Telefonanrufe gibt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie in einer bestimmten 10-Minuten-Periode überlastet ist?

b) Wir nehmen an, dass die Anzahl Anrufe in einer 10-Minuten-Periode von der Anzahl Anrufe in einer anderen 10-Minuten-Periode unabhängig ist. Die Zufallsvariable, welche die Anzahl Anrufe in einer Stunde beschreibt, bezeichnen wir mit Y. Welcher Verteilung folgt Y?

2. Es wird so lange mit einem fairen Würfel gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, ..., 6$ mindestens einmal erschienen ist.

a) Sei X_i die Anzahl Würfe bis die i-te verschiedene Zahl, $i = 1, ..., 6$ geworfen ist. Begründe, dass $X_1 = 1$.

b) Sei $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 2, ..., 6$. Beschreibe Y_i in Wörter. Was ist die Verteilung von Y_i?

c) Wie gross ist der Erwartungswert der Anzahl der benötigten Würfe bis jede der Zahlen $1, ..., 6$ mindestens einmal erschienen ist?

3. In der Stadt Zürich gibt es bekanntlich viele Baustellen. Die Dauer X der Arbeiten bei einer Baustelle liege zwischen 0 und 20 Wochen. Die Dichte $f(x)$ habe die folgende Form.

$$f(x) = \begin{cases} c - \frac{c}{20}x & \text{falls } x \in [0, 20] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Was ist c und warum?

b) Berechne die kumulative Verteilungsfunktion und skizziere diese.

Bitte wenden!

c) Bestimme mittels der kumulativen Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit X *(i)* maximal 5 Wochen beträgt, *(ii)* zwischen 5 und 10 Wochen beträgt.

d) Berechne den Erwartungswert, den Median und die Standardabweichung der Dauer X.

e) Welche Dauer wird nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% überschritten?

f) $K = 40'000 \cdot \sqrt{X}$ entspreche dem Betrag in Franken, den die Arbeiten bei einer Baustelle kosten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeiten bei einer Baustelle höchstens $120'000$ Franken kosten?

4. Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde in jeder Sekunde mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 5\%$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Sekunden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Sekunden überlebt?

b) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Sekunden überlebt hat. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Sekunden überlebt?

c) Diese Sonde sende nun jede Sekunde bis zum Ausfall ein Datenpaket an die Empfangsstation, wobei wir annehmen, dass jedes Paket unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% empfangen wird. Die Zufallsvariable Z bezeichne die Anzahl der erhaltenen Datenpakete. Nehmen wir an, dass die Sonde nach 30 Sekunden ausfällt. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass während dieser Zeit mehr als 27 Datenpakete erhalten werden?

5. Eine Fluggesellschaft weiss aus Erfahrung, dass durchschnittlich 4% der reservierten Plätze nicht eingenommen werden. Für ein Flugzeug mit 127 Sitzen werden daher in der Regel 129 Tickets verkauft.

a) Wie viele Personen werden in so einem Fall im Schnitt erscheinen? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person keinen Platz findet? Welche vernünftige Annahme wird man treffen müssen?

b) Berechne exakt und approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Personen nicht erscheinen?

Siehe nächstes Blatt!

Abgabe: 21. oder 22. Oktober.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12:00-13:00 Uhr im HG G 32.6.
Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0603-00L/`